دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده‌ی ریاضی

پیشنهاد رساله‌ی دکتری

رشته - گرایش

عنوان:

عنوان رساله‌ی دکتری

نویسنده:

آریس آقانیانس

استاد راهنما:

دکتر ...

شهریور ۱۳۹۵

به نام خدا

[متن این صفحه می‌تواند تغییر کند.]

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
پیشگفتار	۱
۱ پیشینه‌ی پژوهش	۲
۱.۱ پیشنیازهای لازم حاصل‌ضرب دکارتی و رابطه‌ها	۲
۲.۱ یکنواختی و فضای یکنواخت	۷
۳.۱ مفهوم نقطه‌ی ثابت و اصل انقباض باناخ در فضاهای متریک	۸
۴.۱ نمونه‌ای از یک جدول	۸
۲ اهداف	۹
۳ روش انجام پژوهش	۱۰
۴ برنامه‌ی زمانبندی	۱۱
مراجع	۱۲

فهرست شکل‌ها

نام شکل **صفحه**

شکل ۱: قطر یک مجموعه‌ی ناتهی و وارون یک رابطه روی آن ۲
شکل ۲: نگاره‌ی یک نقطه تحت یک رابطه ۶

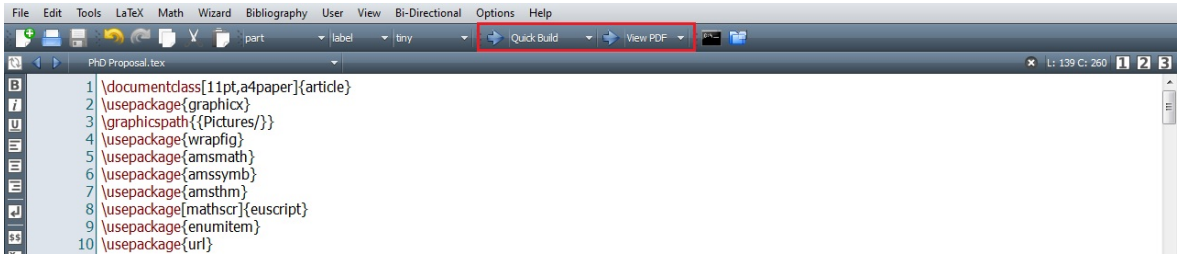
فهرست جدول‌ها

نام جدول **صفحه**

جدول ۱: تعداد حاضرین و غایبین در جلسه ۸

پیشگفتار

برای اجرای این فایل لازم است توزیع تک TeXLive 2015 یا بالاتر و فونت‌های Yas و IranNastaliq روی سیستم نصب باشند. پس از انجام هرگونه تغییر در فایل Ph.D. Proposal.tex، باید این فایل از گزینه‌ی Run در حالت Quick Build پردازش گردد و برای مشاهده‌ی خروجی به صورت PDF، باید از گزینه‌ی View درحالت View PDF استفاده شود (شکل زیر). پردازش برنامه و مشاهده‌ی خروجی به ترتیب با فشردن کلیدهای F1 و F7 نیز امکانپذیر است. در صورت نیاز به گنجاندن شکل در متن، باید فایل شکل مورد نظر در پوشه‌ی Pictures قرار گیرد.



پس از نصب TeXLive روی سیستم، می‌توان با وارد کردن دستور texdoc lshort-persian در محیط cmd ویندوز، فایل راهنمای فارسی لاتک را فراخوانی کرد.

آریس آقانیانس

تهران، شهریور ۱۳۹۵

۱ پیشینه‌ی پژوهش

۱.۱ پیشنیازهای لازم حاصل‌ضرب دکارتی و رابطه‌ها

فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است که ما در سرتاسر این رساله، اعضای آن را نقاط خواهیم نامید. اگر Y یک زیرمجموعه‌ی X باشد (X یک زبرمجموعه‌ی Y باشد)، می‌نویسیم $Y \subseteq X$ و اگر Y یک زیرمجموعه‌ی سره X باشد (X یک زبرمجموعه‌ی سره Y باشد)، می‌نویسیم $Y \subset X$. بنابراین $Y \subset X$ بدان معناست که $Y \subseteq X$ و $Y \neq X$. به علاوه، عدد اصلی، مجموعه‌ی توانی و نگاشت همانی X را به ترتیب با $\mathrm{card}(X)$، $\mathcal{P}(X)$ و id_X نشان می‌دهیم. از اینرو $\mathrm{id}_X : X \to X$ برای هر $x \in X$ با ضابطه‌ی $\mathrm{id}_X(x) = x$ تعریف می‌شود.

می‌دانیم حاصل‌ضرب دکارتی $X \times X$ از همه‌ی زوج‌های مرتبی تشکیل می‌شود که مؤلفه‌های آنها نقاطی از X هستند، یعنی، $X \times X = \{(x, y) : x, y \in X\}$ و هر زیرمجموعه‌ی آن یک رابطه‌ی دوتایی یا به طور خلاصه، یک رابطه روی X می‌باشد. بنابراین $\mathcal{P}(X \times X)$ خانواده‌ی همه‌ی رابطه‌های روی X است.

منظور از قطر X، زیرمجموعه‌ی $X \times X$ متشکل از همه‌ی زوج‌های مرتب با مؤلفه‌های برابر است. در ریاضیات، نمادهای گوناگونی برای نمایش قطر یک مجموعه‌ی ناتهی به کار می‌روند. ما در سرتاسر این رساله، از $\Delta(X)$ برای نشان دادن قطر X استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\Delta(X) = \big\{(x, x) \in X \times X : x \in X\big\} = \mathrm{graph}(\mathrm{id}_X)$$

که در آن $\mathrm{graph}(\mathrm{id}_X)$ نمودار نگاشت همانی X است.

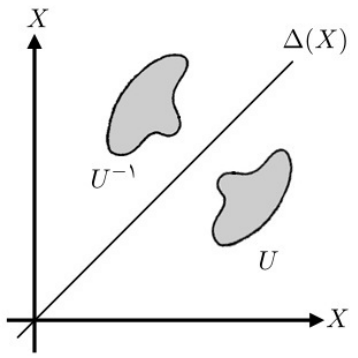
اگر U و V دو رابطه روی X باشند، آن‌گاه با الهام از تعریف وارون و ترکیب نگاشت‌ها، U^{-1} و $U \circ V$ به شکل‌های

$$U^{-1} = \big\{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in U\big\}$$

و

$$U \circ V = \big\{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X; (x, z) \in V,\ (z, y) \in U\big\}$$

تعریف می‌شوند. به ویژه، اگر $f : X \to X$ نگاشتی وارونپذیر باشد، آن‌گاه $\mathrm{graph}(f)^{-1} = \mathrm{graph}(f^{-1})$ و اگر $f, g : X \to X$ دو نگاشت دلخواه باشند، آن‌گاه $\mathrm{graph}(f \circ g) = \mathrm{graph}(f) \circ \mathrm{graph}(g)$. به همین سبب، U^{-1} و $U \circ V$ به ترتیب وارون U و ترکیب U با V نامیده می‌شوند. روشن است که اعمال وارون و ترکیب برای رابطه‌ها تعمیم طبیعی اعمال نظیر برای نگاشت‌ها هستند.



شکل ۱: قطر X و وارون U

از دیدگاه هندسی، قطر یک مجموعه‌ی ناتهی X نیمساز نواحی اول و سوم در دستگاه مختصات دکارتی $X \times X$ و

وارون یک رابطه‌ی U روی X بازتاب U در صفحه نسبت به
$\Delta(X)$ است. اما متأسفانه، به نظر می‌رسد که ترکیب دو رابطه روی X با مفاهیم طبیعی هندسی قابل تعبیر نیست.

دو گزاره‌ی زیر شماری از حالات خاص و مهمترین ویژگی‌های اعمال وارون و ترکیب رابطه‌ها را که در جای‌جای این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنند و ارتباط بین این دو عمل را روشن می‌سازند.

۱.۱ گزاره ([۶، قضیه‌ی ۲.۰]). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است و U و V دو رابطه روی X هستند. در این صورت عبارت‌های زیر برقرارند:

i) $\emptyset^{-1} = \emptyset$، $\Delta(X)^{-1} = \Delta(X)$ و $(X \times X)^{-1} = X \times X$.

ii) $(U^{-1})^{-1} = U$.

iii) اگر $U \subseteq V$، آن‌گاه $U^{-1} \subseteq V^{-1}$.

iv) $(U \cup V)^{-1} = U^{-1} \cup V^{-1}$ و $(U \cap V)^{-1} = U^{-1} \cap V^{-1}$.

برهان. i) بدیهی است.

ii) بنابر تعریف عمل وارون داریم

$$(U^{-1})^{-1} = \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in U^{-1}\} = \{(x,y) \in X \times X : (x,y) \in U\} = U.$$

iii) اگر $(x,y) \in U^{-1}$، آن‌گاه $(y,x) \in U \subseteq V$. بنابراین $(x,y) \in V^{-1}$ و از اینرو $U^{-1} \subseteq V^{-1}$.

iv) فقط تساوی نخست (اجتماع) را ثابت می‌کنیم. اثبات تساوی دیگر مشابه است. به این منظور داریم

$$\begin{aligned}(U \cup V)^{-1} &= \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in U \cup V\} \\ &= \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in U\} \cup \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in V\} \\ &= U^{-1} \cup V^{-1}. \quad \square\end{aligned}$$

۲.۱ گزاره ([۶، قضیه‌ی ۲.۰]). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است و U، V و W سه رابطه روی X هستند. در این صورت عبارت‌های زیر برقرارند:

i) $U \circ \emptyset = \emptyset \circ U = \emptyset$ و $U \circ \Delta(X) = \Delta(X) \circ U = U$.

ii) $(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W)$.

iii) اگر $U \subseteq V$، آن‌گاه $U \circ U \subseteq V \circ V$ و $U \circ U^{-1} \subseteq V \circ V^{-1}$.

iv) اگر $\Delta(X) \subseteq U$، آن‌گاه $U \subseteq U \circ U$ و $U \subseteq U \circ U^{-1}$.

v) $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$.

برهان. i) تساوی‌های دسته‌ی نخست بدیهی‌اند. برای اثبات تساوی‌های دسته‌ی دوم، فرض کنید $(x,y) \in U$. چون $(x,x),(y,y) \in \Delta(X)$، پس $(x,y) \in U \circ \Delta(X)$ و $(x,y) \in \Delta(X) \circ U$. از اینرو $U \subseteq U \circ \Delta(X)$ و $U \subseteq \Delta(X) \circ U$.

بر عکس، اگر $(x,y) \in U \circ \Delta(X)$، آنگاه یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,z) \in \Delta(X)$ و $(z,y) \in U$. پس $z = x$ و بنابراین $(x,y) \in U$. از اینرو $U \circ \Delta(X) \subseteq U$. همچنین، اگر $(x,y) \in \Delta(X) \circ U$، آنگاه یک $u \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,u) \in U$ و $(u,y) \in \Delta(X)$. پس $u = y$ و بنابراین $(x,y) \in U$. از اینرو $\Delta(X) \circ U \subseteq U$.

ii) اگر $(x,y) \in (U \circ V) \circ W$، آنگاه یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,z) \in W$ و $(z,y) \in U \circ V$. به علاوه، یک $u \in X$ نیز وجود دارد به طوری که $(z,u) \in V$ و $(u,y) \in U$. بنابراین $(x,u) \in V \circ W$ و از اینرو $(x,y) \in U \circ (V \circ W)$. در نتیجه، $(U \circ V) \circ W \subseteq U \circ (V \circ W)$.

بر عکس، اگر $(x,y) \in U \circ (V \circ W)$، آنگاه یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,z) \in V \circ W$ و $(z,y) \in U$. به علاوه، یک $u \in X$ نیز وجود دارد به طوری که $(x,u) \in W$ و $(u,z) \in V$. بنابراین $(u,y) \in U \circ V$ و از اینرو $(x,y) \in (U \circ V) \circ W$. در نتیجه، $U \circ (V \circ W) \subseteq (U \circ V) \circ W$.

iii) فقط شمول نخست را ثابت می‌کنیم. اثبات شمول دوم مشابه است. اگر $(x,y) \in U \circ U$، آنگاه یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,z),(z,y) \in U \subseteq V$. بنابراین $(x,y) \in V \circ V$ و از اینرو $U \circ U \subseteq V \circ V$.

iv) اگر $(x,y) \in U$، آنگاه طبق فرض و بندهای (i) و (iii) گزاره‌ی ۱.۱ داریم $(x,x) \in \Delta(X) \subseteq U$ و $(x,x) \in \Delta(X) = \Delta(X)^{-1} \subseteq U^{-1}$. بنابراین $(x,y) \in U \circ U$ و $(x,y) \in U \circ U^{-1}$. از اینرو $U \subseteq U \circ U$ و $U \subseteq U \circ U^{-1}$.

v) اگر $(x,y) \in (U \circ V)^{-1}$، آنگاه $(y,x) \in U \circ V$ و یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(y,z) \in V$ و $(z,x) \in U$. بنابراین $(z,y) \in V^{-1}$ و $(x,z) \in U^{-1}$ و از اینرو $(x,y) \in V^{-1} \circ U^{-1}$. در نتیجه، $(U \circ V)^{-1} \subseteq V^{-1} \circ U^{-1}$.

بر عکس، اگر $(x,y) \in V^{-1} \circ U^{-1}$، آنگاه یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,z) \in U^{-1}$ و $(z,y) \in V^{-1}$. بنابراین $(z,x) \in U$ و $(y,z) \in V$ و از اینرو $(y,x) \in U \circ V$، یعنی، $(x,y) \in (U \circ V)^{-1}$. در نتیجه، $V^{-1} \circ U^{-1} \subseteq (U \circ V)^{-1}$. □

۳.۱ تبصره. با توجه به بند (ii) گزاره‌ی ۲.۱، به کمک اصل استقرای ریاضی، می‌توان بند (iv) لم ۱.۱ و بندهای (iii)، (iv) و (v) لم ۲.۱ را به شکل زیر تعمیم داد:

- اگر $U \subseteq V$، آنگاه برای هر $n \geq 2$ و هر $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ داریم $U^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ U^{\varepsilon_n} \subseteq V^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ V^{\varepsilon_n}$ که در آن $U^1 = U$ و $V^1 = V$. به ویژه، $\underbrace{U \circ \cdots \circ U}_{n \text{ بار}} \subseteq \underbrace{V \circ \cdots \circ V}_{n \text{ بار}}$.
- اگر $\Delta(X) \subseteq U$، آنگاه برای هر $m \geq n \geq 2$ داریم $\underbrace{U \circ \cdots \circ U}_{n \text{ بار}} \subseteq \underbrace{U \circ \cdots \circ U}_{m \text{ بار}}$.

- برای هر $n \geq ۲$ و هر $U_۱, \ldots, U_n \subseteq X \times X$ داریم

$$\Big(\bigcup_{i=۱}^{n} U_i\Big)^{-۱} = \bigcup_{i=۱}^{n} U_i^{-۱}, \quad \Big(\bigcap_{i=۱}^{n} U_i\Big)^{-۱} = \bigcap_{i=۱}^{n} U_i^{-۱} \quad \text{و} \quad (U_۱ \circ \cdots \circ U_n)^{-۱} = U_n^{-۱} \circ \cdots \circ U_۱^{-۱}.$$

چون برهان‌های عبارت‌های بالا بسیار شبیه برهان‌های بندهای متناظر گزاره‌های ۱.۱ و ۲.۱ هستند، از ذکر جزئیات آنها در این نکته خودداری می‌شود.

نتیجه‌ی زیر یک پیامد جالب گزاره‌ی ۲.۱ است.

۴.۱ نتیجه. اگر X مجموعه‌ای ناتهی باشد، آن‌گاه خانواده‌ی همه‌ی رابطه‌های روی X با عمل ترکیب تشکیل یک تکواره با عضو همانی $\Delta(X)$ می‌دهد.

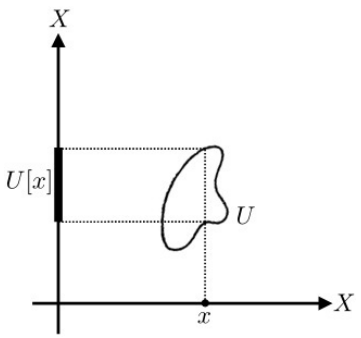
برهان. روشن است که ترکیب هر دو رابطه‌ی روی X یک رابطه روی X است، یعنی، خانواده‌ی همه‌ی رابطه‌های روی X تحت عمل ترکیب بسته است. به علاوه، بندهای (ii) و (i) گزاره‌ی ۲.۱ به ترتیب نشان می‌دهند که عمل ترکیب رابطه‌ها شرکتپذیر است و $\Delta(X)$ عضو همانی آن می‌باشد. در نتیجه، $(\mathcal{P}(X \times X), \circ)$ یک تکواره با عضو همانی $\Delta(X)$ است. □

بر خلاف انتظار، ممکن است ترکیب یک رابطه با وارون خود برابر قطر نباشد، یعنی، $(\mathcal{P}(X \times X), \circ)$ لزوماً یک گروه نیست، و همچنین، ممکن است ترکیب دو رابطه‌ی ناتهی، تهی باشد. برای مثال، اگر $X = \{۱, ۲\}$ و $U = \{(۱, ۱), (۱, ۲)\}$، آن‌گاه $(۱, ۲) \in U \circ U^{-۱}$، ولی $(۱, ۲) \notin \Delta(X)$، و اگر $V = \{(۱, ۲)\}$، آن‌گاه $V \circ V = \emptyset$.

نمادگذاری‌های مربوط به قطر یک مجموعه‌ی ناتهی و اعمال وارون و ترکیب رابطه‌ها ابزار مناسبی برای بیان چهار ویژگی مهم رابطه‌ها به زبان ریاضی هستند. در واقع، اگر X مجموعه‌ای ناتهی و U یک رابطه روی X باشد، آن‌گاه عبارت‌های زیر برقرارند:

- رابطه‌ی U ویژگی بازتابی دارد اگر و فقط اگر $\Delta(X) \subseteq U$؛
- رابطه‌ی U ویژگی تقارنی دارد اگر و فقط اگر $U = U^{-۱}$؛
- رابطه‌ی U ویژگی پادتقارنی دارد اگر و فقط اگر $U \cap U^{-۱} \subseteq \Delta(X)$؛
- رابطه‌ی U ویژگی ترایایی دارد اگر و فقط اگر $U \circ U \subseteq U$.

با توجه به عبارت‌های بالا و بند (iv) گزاره‌ی ۲.۱، U یک رابطه‌ی هم‌ارزی است اگر و فقط اگر $\Delta(X) \subseteq U = U^{-۱} = U \circ U$، و یک رابطه‌ی ترتیب جزئی است اگر و فقط اگر $U \cap U^{-۱} \subseteq \Delta(X) \subseteq U = U \circ U$. از اینرو یگانه رابطه‌ای که هم هم‌ارزی است و هم ترتیب جزئی، رابطه‌ی تساوی (یعنی، $\Delta(X)$) می‌باشد.



شکل ۲: نگاره‌ی x تحت U

فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است. اگر $x \in X$ و U یک رابطه روی X باشد، آن‌گاه $U[x]$ برابر مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب متعلق به U با مؤلفه‌ی اول x تعریف می‌شود، یعنی،

$$U[x] = \{y \in X : (x, y) \in U\}.$$

در واقع، $U[x]$ نگاره‌ی وارون U تحت نگاشت $y \mapsto (x, y)$ از X به توی $X \times X$ است. به ویژه، اگر $f : X \to X$ نگاشتی دلخواه باشد، آن‌گاه $(\mathrm{graph}(f))[x] = \{f(x)\}$. به همین سبب، گاهی اوقات $U[x]$ نگاره‌ی x تحت U نامیده می‌شود.

این قسمت را با گزاره‌ی زیر به پایان می‌رسانیم. این گزاره شماری از حالات خاص و مهمترین ویژگی‌های نگاره‌ی یک نقطه تحت یک رابطه را بیان می‌کند.

۵.۱ گزاره ([۶، قضیه‌ی ۲.۰]). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است. اگر $x \in X$ و U و V دو رابطه روی X باشند، آن‌گاه عبارت‌های زیر برقرارند:

i) $\emptyset[x] = \emptyset$، $\Delta(X)[x] = \{x\}$ و $(X \times X)[x] = X$.

ii) اگر $U \subseteq V$، آن‌گاه $U[x] \subseteq V[x]$.

iii) $(U \cup V)[x] = U[x] \cup V[x]$ و $(U \cap V)[x] = U[x] \cap V[x]$.

iv) $(U \circ V)[x] = \bigcup_{y \in V[x]} U[y]$.

برهان. i) تساوی نخست به روشنی برقرار است. برای اثبات تساوی‌های دوم و سوم داریم

$$\Delta(X)[x] = \{y \in X : (x, y) \in \Delta(X)\} = \{x\}$$

و

$$(X \times X)[x] = \{y \in X : (x, y) \in X \times X\} = X.$$

ii) اگر $y \in U[x]$، آن‌گاه $(x, y) \in U \subseteq V$. بنابراین $y \in V[x]$ و از اینرو $U[x] \subseteq V[x]$.

iii) فقط تساوی نخست را ثابت می‌کنیم. اثبات تساوی دیگر مشابه است. به این منظور داریم

$$\begin{aligned}(U\cup V)[x] &= \{y\in X:(x,y)\in U\cup V\}\\ &= \{y\in X:(x,y)\in U\}\cup\{y\in X:(x,y)\in V\}=U[x]\cup V[x].\end{aligned}$$

iv) اگر $z\in(U\circ V)[x]$، آن‌گاه $(x,z)\in U\circ V$ و یک $y\in X$ وجود دارد به طوری که $(x,y)\in V$ و $(y,z)\in U$. بنابراین $y\in V[x]$ و $z\in U[y]$. از اینرو $z\in\bigcup_{y\in V[x]}U[y]$. در نتیجه، $(U\circ V)[x]\subseteq\bigcup_{y\in V[x]}U[y]$.
بر عکس، اگر $z\in\bigcup_{y\in V[x]}U[y]$، آن‌گاه یک $y\in V[x]$ وجود دارد به طوری که $z\in U[y]$. بنابراین $(x,y)\in V$ و $(y,z)\in U$. از اینرو $(x,z)\in U\circ V$، یعنی، $z\in(U\circ V)[x]$. در نتیجه، $\bigcup_{y\in V[x]}U[y]\subseteq(U\circ V)[x]$. □

۲.۱ یکنواختی و فضای یکنواخت

پیش از آغاز بحث درباره‌ی یکنواختی و فضاهای یکنواخت، برای پیشگیری از ابهام، لازم است چند نماد که در سرتاسر این رساله برای ایجاز در گفتار به کار می‌روند، معرفی کنیم.

منظور از $\mathbb{Z}^+$، مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی و منظور از $\mathbb{R}^+$، مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی است که برای سادگی، از گذاشتن اندیس صفر برای آنها خودداری شده است. بنابراین

$$\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}\cup\{\circ\}=\{\circ,۱,۲,\ldots\}\quad\text{و}\quad\mathbb{R}^+=[\circ,\infty).$$

اگر X مجموعه‌ای ناتهی باشد، آن‌گاه $\rho_\circ$ و $d_\circ$ به ترتیب نمایانگر شبه‌متر ثابت صفر و متر گسسته بر X هستند، یعنی،

$$\rho_\circ(x,y)=\circ\quad\text{و}\quad d_\circ(x,y)=\begin{cases}۱ & x\neq y,\\ \circ & x=y\end{cases}\qquad(x,y\in X).$$

برای نمایش درون و بستار هر زیرمجموعه‌ی A از فضای توپولوژیک دلخواه (X,τ)، به ترتیب از A° و $\overline{A}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین A° بزرگترین زیرمجموعه‌ی باز X مشمول در A، و $\overline{A}$ کوچکترین زیرمجموعه‌ی بسته‌ی X شامل A است. به علاوه، اگر $x\in X$، آن‌گاه منظور از یک همسایگی x، زیرمجموعه‌ای از X است که x را در درون خود دارد و $\mathcal{N}_x$ نمایانگر دستگاه همسایگی x می‌باشد، یعنی،

$$\mathcal{N}_x=\{A\subseteq X:x\in A^\circ\}.$$

از اینرو اگرچه شماری از نویسندگان همچون مانکرس [۵] همسایگی‌ها را زیرمجموعه‌های بازی از فضاهای توپولوژیک معرفی می‌کنند، اما با توجه به قرارداد انجام‌شده، لزومی ندارد یک همسایگی مجموعه‌ای باز باشد.

سرانجام، اگر (X,d) یک فضای متریک باشد، آن‌گاه برای هر $x\in X$ و هر $r>\circ$، از $N_r(x)$ برای نمایش همسایگی به مرکز x و شعاع r استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$N_r(x)=\{y\in X:d(y,x)<r\}.$$

۳.۱ مفهوم نقطه‌ی ثابت و اصل انقباض باناخ در فضاهای متریک

فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $T : X \to X$ نگاشتی دلخواه است. در نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت، اغلب برای سادگی در نمایش کنش T بر هر نقطه‌ی $x \in X$ از گذاشتن کمانک دور x خودداری می‌شود. ما نیز در این رساله، از این قاعده پیروی می‌کنیم و به جای $T(x)$ می‌نویسیم Tx.

به همین ترتیب، اگر $S : X \to X$ نگاشت دیگری باشد، آن‌گاه به جای $T \circ S$ و $(T \circ S)(x)$ نمادهای ساده‌تر TS و TSx را به کار می‌بریم. به علاوه، قرارداد می‌کنیم که

$$T^{۰} = \mathrm{id}_X, \quad T^{۱} = T \quad \text{و} \quad T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ بار}} \qquad n = ۲, ۳, \ldots .$$

۶.۱ تعریف ([۳، تعریف ۱.۰.۰]). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $T : X \to X$ نگاشتی دلخواه است. نقطه‌ی $x \in X$ یک نقطه‌ی ثابت T نامیده می‌شود هرگاه $Tx = x$. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط ثابت T با $\mathrm{fix}(T)$ نشان داده می‌شود.

۴.۱ نمونه‌ای از یک جدول

جدول ۱: تعداد حاضرین و غایبین در جلسه

روز	حاضرین	غایبین
شنبه	۱۵	۳
یکشنبه	۲۰	۷
دوشنبه	۱۲	۲

۲ اهداف

۳ روش انجام پژوهش

۴ برنامه‌ی زمانبندی

تاریخ‌ها را به صورت ۱۳۹۵/۶/۳۱ وارد کنید.

مراجع

[1] S. M. A. Aleomraninejad, Sh. Rezapour and N. Shahzad, Convergence of an iterative scheme for multifunctions, *J. Fixed Point Theory Appl.* **12** (2012), no. 1-2, 239–246.

[2] M. R. Alfuraidan and M. A. Khamsi, Caristi fixed point theorem in metric spaces with a graph, *Abstr. Appl. Anal.* **2014**, Art. ID 303484, 5 pages.

[3] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, *Springer-Verlag, New York*, 2003.

[4] W. A. Kirk, Fixed points of asymptotic contractions, *J. Math. Anal. Appl.* **277** (2003), no. 2, 645–650.

[5] J. R. Munkres, Topology: A First Course, *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.*, 1975.

[6] W. Roelcke and S. Dierolf, Uniform Structures on Topological Groups and Their Quotients, *McGraw-Hill International Book Co., New York*, 1981.

[۷] انجمن ریاضی ایران با همکاری گروه ریاضی و آمار مرکز نشر دانشگاهی، واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار (انگلیسی–فارسی، فارسی–انگلیسی)، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۸.

[۸] مجیدی، فریبرز، فرهنگ تلفّظ نام‌های خاص (تاریخی و جغرافیایی)، تهران: فرهنگ معاصر، ۱۳۹۰.

K. N. Toosi University of Technology
Faculty of Mathematics

Ph.D. Proposal

Field

Title:

Title of Ph.D. Thesis

By:

Aris Aghanians

Supervisor:

Dr. ...

September 2016